11. マルチフラクタル集合におけるf-α 定式の一般化

名大工　本田勝也，中央大理工　松下貢

カオスにおけるストレンジアトラクター，ＤＬＡクラスターなど複雑なパターンを定量的に解析するために，フラクタルはその有効性を発揮してきた．最近さらに詳細な解析のためにマルチフラクタル次元D_q，あるいは$f(\alpha)$の概念が開発されている．[1][2]

それらは次のように定式化される．集合（パターン）を大きさℓの部分に分割しその総数を$N(\ell)$とする．ｉ番目の部分に付随する測度（確率）を$P_i(\ell)$とすると，分配関数$Z_\ell(q)=\Sigma_i[P_i(\ell)]^q$を用いて，マルチフラクタル次元$D_q$，あるいは$\tau(q)\equiv(q-1)D_q$は

$$\tau(q) = \lim_{\ell\to 0}\ln Z_\ell(q)/\ln\ell \tag{1}$$

で定義される．[1] $D_{q=0}$は集合（確率のsupport ）自身のフラクタル次元d_fに等しい．もし，各部分の測度を集合全体の平均値で置き代えれば$P_i(\ell)=1/N(\ell)$であり，$D_q=d_f$が得られる．

もし，測度$P_i(\ell)$ がsingularity α_iのべき乗則（$P_i\sim\ell^{\alpha_i}$）に従い，α_iが$\alpha<\alpha_i<\alpha+d\alpha$ に存在する部分の総数$N(\alpha)d\alpha$がその部分集合のフラクタル次元$f(\alpha)$を用いて$\rho(\alpha)\ell^{-f(\alpha)}d\alpha$と表されるとすると，分配関数は鞍部点法により

$$Z_\ell(q) = \int d\alpha\,\rho(\alpha)\ell^{-f(\alpha)+q\alpha} \sim \ell^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))} \tag{2}$$

と見積もられる．ただし，$q=df(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha(q)}$ である．したがって，(1) 式より

$$\tau(q) = q\alpha(q)-f(\alpha(q)) \tag{3}$$

が求められる．$f(\alpha)$スペクトラムは$\tau(q)$をルジャンドル変換して

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq, \quad f(q) = q\alpha(q)-\tau(q) \tag{4}$$

と与えられる．[2]

通常は実験や計算機シミュレーションによって得られたパターンから$P_i(\ell)$を計算し，分配関数$Z_\ell(q)$とℓの両対数プロットの勾配から$\tau(q)$を得，さらに，(4) 式に基づいてqをパラメータとして$f(\alpha)$が求められている．しかし，この手順では本来パターンに存在するsingularitiyが得られない場合がある．本稿の目的はこの事実を実証し，さらにその困難を克服する方法を提示することである．

最も簡単な例として3-スケールのカントール集合を取り上げる．図1にあるように，各切片に測度p_1, p_2, p_3を割り当てる．各切片の長さを等しく設定すると，n ステップ目の分割の区分長は$\ell=(1/3)^n$である．$f(\alpha)$スペクトラムを求める通常の手順は次のように実行される．測度p_iをm_i回 $(i=1,2,3)$ 数える区分の測度$P(m_1, m_2, m_3)$ は$P(m_1, m_2, m_3)=p_1^{m1}p_2^{m2}p_3^{m3}$である．また，そのような区分の数は明らかに$C_n(m_1, m_2, m_3)=n!/(m_1!m_2!m_3!)$で与えられる．したがって，分配関数は，区分長さ$\ell$の代わりにステップ数n を用いて

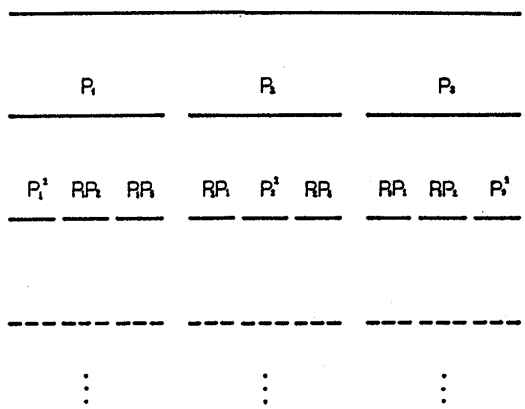

図1

$$Z_n(q) = \Sigma'_{m1}\Sigma'_{m2}\Sigma'_{m3}C_n(m_1, m_2, m_3)[P(m_1, m_2, m_3)]^q \tag{5}$$

と表される．ここで３つのΣ'は$m_1+m_2+m_3=n$の条件下で行われる．分配関数を求めるために次の母関数を導入するのが便利である．

$$\Xi(z) = \Sigma_{n=0}(z^n/n!)Z_n(q) \tag{6}$$

これは次のように

$$\Xi(z) = \Sigma_{m1=0}\Sigma_{m2=0}\Sigma_{m3=0}z^{(m1+m2+m3)}(p_1^{m1}p_2^{m2}p_3^{m3})^q/(m_1!m_2!m_3!)$$

$$= \exp[z(p_1^q+p_2^q+p_3^q)]$$

$$= \Sigma_{n=0}(z^n/n!)(p_1^q+p_2^q+p_3^q)^n$$

と変形されるので，(6) 式と比べて

$$Z_n(q) = (p_1{}^q+p_2{}^q+p_3{}^q)^n \tag{7}$$

が得られる．結局(1),(4) 式より

$$\alpha(q) = -(s_1\ln p_1+s_2\ln p_2+s_3\ln p_3)/\ln 3 \tag{8a}$$

$$f(q) = -(s_1\ln s_1+s_2\ln s_2+s_3\ln s_3)/\ln 3 \tag{8b}$$

が求められる．ここで $s_i(i=1,2,3)$ は

$$s_i = p_i{}^q/(p_1{}^q+p_2{}^q+p_3{}^q) \tag{9}$$

で定義され，q のみの関数である．したがって，図２のような$f(\alpha)$曲線が得られる．図２は$p_1=1/2, p_2=1/3, p_3=1/6$の場合を表した．

一方，3-スケールカントール集合のsingularity は直接求めることができる．$P(m_1,m_2,m_3)$ および$C_n(m_1,m_2,m_3)$の定義より，それぞれ指数則に従い，その指数は

$$\alpha(r_1,r_2,r_3) = -(r_1\ln p_1+r_2\ln p_2+r_3\ln p_3)/\ln 3 \tag{10a}$$

$$f(r_1,r_2,r_3) = -(r_1\ln r_1+r_2\ln r_2+r_3\ln r_3)/\ln 3 \tag{10b}$$

で与えられることがわかる．ここで$r_i=m_i/n$ は，$0\leqq r_1,r_2,r_3\leqq 1$および$r_1+r_2+r_3=1$を満足する領域内を変動するので，その自由度は２である．その具体例が図２に点で示されている．このように通常の手順では$f(\alpha)$曲線の内部のsingularity を拾い出すことはできない．これらを隠れたsingularity 呼ぶことにする．

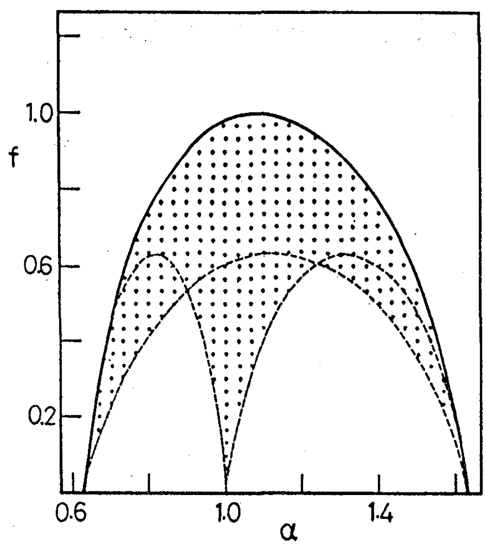

図２

次に，一般的視点から何故このような矛盾が起

こり，その困難を克服するためにはどうすれば良いかを考えよう．マルチフラクタル集合をnステップ目にk^n個(kは自然数）の部分に分割した時，それぞれの部分は$\{\varepsilon\}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$で指定される．$\varepsilon_j$は$1,2,\cdots,k$ の値をとる．i 番目の部分の測度$P_i(\ell)$ は$P(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ と表される．もし，ハミルトニアンを$\mathcal{H}(\{\varepsilon\})=-\ln P(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ と導入すると，分配関数は

$$Z_n(q) = \Sigma_{\{\varepsilon\}}\exp[-q\mathcal{H}(\{\varepsilon\})] \tag{11}$$

と統計力学でのそれと同じ形式に書かれる．ただし，q は逆温度β と異なり$-\infty\leq q\leq\infty$であることに注意しよう．エネルギーが連続値をとる場合には，状態密度$\Omega(E)$を用いて分配関数は

$$Z_n(q) = \int dE\Omega(E)\exp[-qE] \tag{12}$$

と表される．大きいn に対して鞍部点法により$Z_n(q)\sim\exp[S(E^*)-qE^*]$と評価される．ここで，$S(E)$はエントロピーで，$E^*$は$dS(E)/dE|_{E=E^*}=q$ によって与えられ平均値$\langle E\rangle$ に等しい．したがって，自由エネルギー$F(q)$が$F(q)=E^*-q^{-1}S(E^*)$と同定される．ＤＬＡクラスターのような成長系に対しても自由エネルギーが定義されることの重要性に注目したい．これらの関係から次の熱力学形式が成立するのは自明と言えよう．

$$\alpha(q) = E^*/n,\quad f(\alpha) = S(E)/n,\quad \tau(q) = q^{-1}F(q)/n \tag{13}$$

ただし，係数lnk は除かれている．

さて，上の定式を3-スケールカントール集合に適用してみる．分割の過程はマルコフ的であるので，ハミルトニアンは個々

$$h(\varepsilon_j) = -\ln P(\varepsilon_j) = a\varepsilon_j^2+b\varepsilon_j+c \tag{14}$$

の和で表される．ε_jは$\varepsilon_j=1,2,3$の値をとる．第３式の係数a, b, c の具体的な表式は省略する．(14)式を(11)式に代入すれば当然のことながら(7) 式を再現する．しかし，ここで$\alpha(q)=\langle h(\varepsilon)\rangle$にはそれぞれ独立な量$\langle\varepsilon\rangle,\langle\varepsilon^2\rangle$を含んでいることに注意すると，問題の解決法が見えてくる．この縮退を除くためには対称性を破る外場η を導入すれば良い．それと共役な秩序変数として，我々の目的のためには表式を特定する必要はないが，簡単のためにイジングスピン系

の磁化に相当する$\Psi(\{\varepsilon\})=\Sigma_j(\varepsilon_j-2)$ を採用する．こうして分配関数を一般化して

$$Z_n(q,\eta) = \Sigma_{\{\varepsilon\}}\exp[-q\mathcal{H}(\{\varepsilon\})-\eta\Psi(\{\varepsilon\})]$$

$$= [\exp\{-qh(1)+\eta\}+\exp\{-qh(2)\}+\exp\{-qh(3)-\eta\}]^n \tag{15}$$

が得られる．したがって，統計力学の処方箋に従って次の関係式が導かれる．

$$\tau(q,\eta) = -\lim_{n\to\infty}\ln Z_n(q,\eta)/n, \tag{16a}$$

$$\alpha(q,\eta) = \partial\tau(q,\eta)/\partial q, \tag{16b}$$

$$\phi(q,\eta) \equiv \langle\Psi(\{\varepsilon\})\rangle/n = \partial\tau(q,\eta)/\partial\eta, \tag{16c}$$

$$f(\alpha(q,\eta),\phi(q,\eta)) = q\alpha(q,\eta)+\eta\phi(q,\eta)-\tau(q,\eta) \tag{16d}$$

(15)式を(16)式に代入すれば

$$\alpha(q,\eta) = h(1)u_1+h(2)u_2+h(3)u_3 \tag{17a}$$

$$f(q,\eta) = -(u_1\ln u_1+u_2\ln u_2+u_3\ln u_3) \tag{17b}$$

が導かれる．ここでu_iは

$$u_i = \exp\{-qh(i)-\eta(i-2)\}/(e^{-qh(1)+\eta}+e^{-qh(2)}+e^{-qh(3)-\eta}) \tag{18}$$

で与えられるが，それらは(10)式におけるr_iと同じ領域内を変動するので(17)式は(10)式と等価であることが分かる．また，$\eta=0$ の場合である(8) 式から得られる$f(\alpha)$曲線は(10)式で表されるsingularity 分布の上側の輪郭であることが次のように理解される．なぜならば，$\partial f/\partial\phi=\eta=0$でありかつ，$\partial^2f/\partial^2\phi<0$であるので，$f(\alpha(q,0),\phi(q,0))\geq f(\alpha(q,\eta),\phi(q,\eta))$ が成立するからである．

これらの議論によって，隠れたsingularity が3-スケールカントール集合に限らず一般的なマルチフラクタル集合においても存在しうることが理解される．隠れたsingularity が表れる原因は，自由エネルギーの縮退がエネルギーだけでは解けないことにある．もし，ハミルトニアンに異なるサイト間の相互作用が含まれているとすると，エネルギーとは独立で示量的な熱力学的量$\Psi_m(\{\varepsilon\})$ が存在しうる．それらに共役な場η_mを導入し，拡張された分配関数を定義する．

$$Z_n(q,\{\eta\}) = \Sigma_{\{\varepsilon\}}\exp[-q\ \ (\{\varepsilon\})-\Sigma_m \eta_m \Psi_m(\{\varepsilon\})] \qquad (19)$$

この拡張された分配関数を用いれば，マルチフラクタル集合から隠れたsingularity のうち必要に応じた情報を取り出すことができる．この方式はマルチフラクタル集合の研究を発展させるのに役立つであろう．

文献

1）A.G.E.Hentschel and I.Procaccia,Physica 8D,435(1983).

2）T.C.Halsey,M.H.Jensen,L.P.Kadanoff,I.Procaccia and B.J.Shraiman,Phys.Rev.A33,1141 (1986).